Теорема 2. *Пусть для системы* (1)

$$A=0.1115090985240917952693937799198143971738344680713172032910172212219586433821520949079596803 70\ldots,$$

$$B=0.04336313866581082823764034275740270888449174264732542067957021774585742260977109\ldots,$$

$$C=-0.35381896027680309552305100744496652320429306377181450366786170372734151127671 61\ldots,$$

$$K=0.1184562427973474008576865242112638986521937711540965476119766389135891511946319 7\ldots,$$

$$L=B,$$

$$M=0.0573470939638434381387439415746735113708882390579778616189666917285728638435283 3\ldots,$$

$$N=-0.0538704548010870999684199567865305861837238661307304428490564332207965531972989 2\ldots$$

Тогда $O(0,0)$ *системы* (1) *является фокусом седьмого порядка.*

При выполнении условий теоремы 2 $u=A+C$ является корнем алгебраического уравнения 457-й степени, коэффициенты которого являются взаимно простыми целыми числами, содержащими от 508 до 699 цифр. При этом 379 коэффициентов содержат более 600 цифр.

Теорема 3. *Существуют кубические системы вида*

$$\dot{x}=y+\lambda x+Ax^2+3Bxy+Cy^2, \quad \dot{y}=-x+\lambda y+Kx^3+3Lx^2y+Mxy^2+Ny^3,$$

где $A,B,C,K,L,M,N\in\mathbb{R}$, *с семью предельными циклами в окрестности начала координат.*

Литература

1. Ле Ван Линь. *Центры кубической системы с однородными нелинейностями* // Вестн. БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. 2003. №1. С. 90–95.

2. Садовский А. П., Щеглова Т. В. *Многообразия центра одного класса кубических систем* // X Белорусская математическая конференция: Тез. докл. Междунар. науч. конф. Минск, 3-–7 ноября 2008 г. Ч. 2. Мн: Ин-т математики НАН Беларуси, 2008. С. 63.

СИММЕТРИЙНЫЕ СВОЙСТВА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.А. Самодуров[1], **Е.И. Федорако**[2],

[1] Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
[2] Белорусский Национальный технический университет, Минск, Беларусь,
elena_fedorako@mail.ru

Известно, что дифференциальные уравнения интегрируются в квадратурах лишь в исключительных случаях. Поэтому для исследования свойств их решений применяются методы аналитической и качественной теории, а также численные и приближенные методы. Численные и приближенные методы позволяют получить свойства конкретных решений конкретного уравнения, но, чаще всего, не позволяют судить о виде общего решения и о решениях уравнений, структурно близких к исследуемым.

Самым эффективным аппаратом интегрирования таких уравнений, особенно нелинейных, является групповой метод. Фактически, он является единственным универсальным и эффективным методом аналитического решения нелинейных дифференциальных уравнений. Предметом исследования группового метода являются симметрийные свойства дифференциальных уравнений, т. е. способность уравнений оставаться неизменными (инвариантными) в результате воздействия на них преобразований координат.

В основе группового метода исследования дифференциальных уравнений лежит понятие группы преобразований, зависящей от одного вещественного параметра. Каждая такая однопараметрическая группа полностью определяется первым членом своего тейлоровского разложения по параметру, или, другими словами, касательным векторным полем, называемым также инфинитезимальным оператором группы.

Основными задачами практического группового анализа являются:

1) разработка алгоритмических методов поиска всех видов симметрии уравнений;

2) решение обратной задачи: поиск по заданному оператору дифференциальных уравнений, инвариантных относительно соответствующей этому оператору группы преобразований;

3) установление общих принципов использования найденных симметрий в практических задачах.

Для построения группы, допускаемой обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка вида

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{1}$$

применяют метод определяющих уравнений, описанный в [1]. Инфинитезимальный оператор группы, допускаемой уравнением (1), находят в виде

$$X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{2}$$

При исследовании дифференциальных уравнений второго порядка на практике применяют оператор продолженной группы преобразований, который имеет вид

$$\underset{2}{X} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \varsigma_1\frac{\partial}{\partial y'} + \varsigma_2\frac{\partial}{\partial y''}$$

Для нахождения оператора (2) на уравнение (1) действуют оператором группы продолженных преобразований $\underset{2}{X}$. Полученное в результате уравнение

$$\underset{2}{X}F|_{F=0} \equiv \left(\xi F_x + \eta F_y + \varsigma_1 F_{y'} + \varsigma_2 F_{y''}\right)|_{F=0} = 0$$

называется определяющим уравнением для группы, допускаемой дифференциальным уравнением (1).

В работе [2] было проведено исследование дифференциального уравнения

$$y'' + f(x)y' + \Phi(y) + F(x) = O, \tag{3}$$

где $y(x)$ — искомая функция, $\Phi(y) = e^{\mu y}$, $f(x)$ и $F(x)$ — функции аргумента x. В результате была установлена связи между решением одного из уравнений вида (3) и решением другого, структурно близкого к нему уравнения. Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Если $y_1(x)$ — решение уравнения*

$$y'' + \alpha y' + Ke^y + \gamma = 0,$$

то уравнение

$$y'' + \alpha y' + K\mu e^y + \gamma = 0$$

имеет семейство решений $y = y_1(x + c) - \ln \mu$, где c — произвольная постоянная.

Теорема 2. *Если* $y_1(x)$ *— решение уравнения*

$$y'' + f(x)y' + Ke^y + F(x) = 0,$$

то уравнение

$$y'' + f(x)y' + K\mu e^y + F(x) = 0$$

имеет решение $y = y_1(x) - \ln\mu$.

В работе [3] доказана

Теорема 3. *Дифференциальное уравнение*

$$y_{xx} + f(x,z)y_x + \Phi(y,z) + F(x,z) = 0 \tag{4}$$

допускает группу непрерывных по параметру преобразований тогда и только тогда, когда одновременно выполняются соотношения

$$A^2 f_z + f_x A^1 y + f_x B^1 + f^2 A^1 y + f B^1_x + 2A^3_x - f_x A^1 y - f^2 A^1 y - B^1_{xx} + 3A^1 f + 3A^1\Phi = 0$$

и

$$(A^1 y + B^1)F_x + A^1(F_z + \Phi_z) + \Phi_y(A^3 y + B^3) + f(A^3_x y + B^3_x) + A^3_{xx} y +$$
$$+ B^3_{xx} - A^3(F + \Phi) + 2(A^1_x y + B^1_x)(F + \Phi) = 0.$$

При этом можно найти функции ξ^1, ξ^2 и η, обеспечивающие существование такого преобразования переменных, относительно которого будет инвариантно дифференциальное уравнение (4).

Литература

1. Ибрагимов Н. Х. *Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования.* Н. Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та им. Н. И. Лобачевского, 2007.

2. Самодуров А. А., Федорако Е. И. *О связи между решениями двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка* // Докл. БГУИР. 2011. № 8(62). С. 5–8.

3. Федорако Е. И. *Непрерывные преобразования дифференциальных уравнений второго порядка с заданной нелинейностью* // Весці Беларускага дзяржаўнага педагагічнага універсітэта. 2014. Сер. 3. С. 14–20.

ON THE STABILITY OF GRADIENT-LIKE SYSTEMS

D.N. Cheban[1], **B.S. Kalitine**[2]

[1] State University of Moldova, Moldova
davidcheban@yahoo.com
[2] Belarusian State University, Belarus
Kalitine@yandex.by

This report is dedicated to the study the problem of stability of some classes of gradient-like system of differential equations (both autonomous and non-autonomous cases). We present two main results. The first is a generalization of Absil & Kurdyka theorem [1] about stability of gradient systems with analytic potential for non-gradient systems. Secondly we generalize for some classes of gradient-like non-autonomous systems the well-known Lagrange — Dirichet theorem (see [2]).

Let $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$, $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ and $\mathbb{R}^n$ be the real n-dimensional Euclidean space. Consider a system of differential equations

$$\dot{x} = f(x), \quad (x \in U \subset \mathbb{R}^n), \tag{1}$$